



TITLE:

球面上の非コンパクト変換群を構成する一つの方法について(多様体のトポロジー: 中岡稔先生御還暦記念研究集会)

AUTHOR(S):

内田, 伏一

---

CITATION:

内田, 伏一. 球面上の非コンパクト変換群を構成する一つの方法について(多様体のトポロジー: 中岡稔先生御還暦記念研究集会). 数理解析研究所講究録 1987, 605: 134-142

ISSUE DATE:

1987-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99678>

RIGHT:

球面上の非コンパクト変換群を構成する方法について

山形大・理 内田伏一 (Fuichi Uchida)

## §0 序

行列  $M \in M_n(\mathbb{R})$  について, 次の条件を考えよう。

$$(T) \quad \frac{d}{dt} \|\exp(tM)x\| > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n - \{0\}$$

この条件は, 行列  $M$  が定める一径数群  $\exp(tM)$  による, 各点  $x \in \mathbb{R}_0^n$  の軌道が原点を中心とする  $n-1$  次元同心球面のすべてと外向きに transversal に交わることを意味している。

行列  $M = (m_{ij})$  が条件 (T) を満足することと 2 次形式  $\sum_{i,j} m_{ij} x_i x_j$  が正定値であることは同等であることが分かる。

条件 (T) を満足する行列  $M$  に対して, 関数

$$t \mapsto \|\exp(tM)x\| \quad (x \in \mathbb{R}_0^n)$$

は  $C^\infty$  級の狭義単調増加関数であり, さらに

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\exp(tM)x\| = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\exp(tM)x\| = 0 \quad \text{--- (1)}$$

が成り立つ。従って、 $C^w$ 級の関数

$$\tau: \mathbb{R}_0^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|\exp(\tau(x)M)x\| = 1$$

が一意に定まる。さらに、 $C^w$ 級の写像  $\pi^M: \mathbb{R}_0^n \rightarrow S^{n-1}$  が

$$\pi^M(x) = \exp(\tau(x)M)x$$

によって定義できる。とくに、 $\pi^M|_{S^{n-1}} = \text{id}$  である。

次に、リイ群  $G$  の表現  $\rho: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  と行列  $M \in M_n(\mathbb{R})$  の対  $(\rho, M)$  について、次の条件を考えよう。

(i)  $M$  は条件 (T) を満足する。

(ii)  $M \cdot \rho(g) = \rho(g) \cdot M, \forall g \in G$ 。

この2つの条件を満足する対  $(\rho, M)$  を次数  $n$  の TC-対と呼ぶことにしよう。このような  $(\rho, M)$  に対して、 $C^w$ 級の写像

$$\xi: G \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

が、 $\xi(g, x) = \pi^M(\rho(g)x)$  によって定義され、球面  $S^{n-1}$  上のリイ群  $G$  の作用であることが分かる。この作用  $\xi$  を、表現  $\rho$  に付随し  $M$  より *twist* された、twisted linear action と呼ぶことにしよう。とくに  $M = I_n$  である場合、 $\xi$  を表現  $\rho$  に付随した linear action と呼ぶ。

注. 表現  $\rho$  が直交行列表現、すなわち  $\rho(G) \subset O(n)$  , ならば、 $\rho$  に付随した *twisted linear action* はすべて  $\rho$  に付随した *linear action* に一致する。

## §1 条件 (T) について

行列  $M \in M_n(\mathbb{R})$  が条件 (T) を満足しているものとする。

$f(t; x) = \|\exp(tM)x\|$  とおき,  $t$  についての導関数を考えれば, 対応  $(t, x) \mapsto f'(t; x)$  は  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^n$  上で定義された正値連続関数である. コンパクト集合  $0 \times S^{n-1}$  の上でとる値の最小値を  $\varepsilon$  とする. この場合

$$f'(0; x) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall x \in S^{n-1}$$

が成り立つ. さらに,  $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^n$  に対して

$$\begin{aligned} f'(t; x) &= f'(0; \exp(tM)x) \\ &= \|\exp(tM)x\| \cdot f'(0; \|\exp(tM)x\|^{-1} \exp(tM)x) \\ &\geq \varepsilon \cdot \|\exp(tM)x\| = \varepsilon \cdot f(t; x) \end{aligned}$$

が成り立ち,

$$\frac{d}{dt} \log f(t; x) \geq \varepsilon \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^n$$

となる.  $t > 0$  の場合と,  $t < 0$  の場合に分けて, この不等式の両辺を積分すると, 次の不等式を得る.

$$f(t; x) \geq \|x\| e^{\varepsilon t} \quad (t > 0), \quad f(t; x) \leq \|x\| e^{\varepsilon t} \quad (t < 0).$$

故に, §0 の (I) を満足することが分かる.

行列  $M \in M_n(\mathbb{R})$  について,  $\frac{d}{dt} \|\exp(tM)x\|^2$  を考察して

$$\exp(tM)x \cdot M \exp(tM)x = \|\exp(tM)x\| \cdot \frac{d}{dt} \|\exp(tM)x\|$$

を得るので,  $M = (m_{ij})$  が条件 (T) を満足することと 2 次形式

$\sum_{i,j} m_{ij} x_i x_j$  が正定値であることとは同等であることが分かる。

$n=2$  の場合, 次の行列はいずれも条件 (T) を満足している。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : 0 < x \leq 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & y \\ -y & 1 \end{pmatrix} : y > 0.$$

## §2 TC-対の同値関係について

リー群  $G$  を一つ固定しておく。 次数  $n$  の TC-対  $(\rho, M)$ ,  $(\sigma, N)$  について,  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  と  $c > 0$  が存在して

$$A\rho(g) = \sigma(g)A \quad (\forall g \in G), \quad AM = cNA$$

が成り立つ場合,  $(\rho, M)$  と  $(\sigma, N)$  は同値であると定義する。

TC-対  $(\rho, M)$  が定める *twisted linear action* を  $\xi_{(\rho, M)}$  で表わそう。 ここで, 次数  $n$  の TC-対  $(\rho, M)$  と  $(\sigma, N)$  が同値であれば, 2つの  $G$  多様体  $(S^{n-1}, \xi_{(\rho, M)})$  と  $(S^{n-1}, \xi_{(\sigma, N)})$  の間には *equivariant analytic diffeomorphism* が存在することを示そう。

任意の  $c > 0$  に対して,  $\xi_{(\sigma, cN)} = \xi_{(\sigma, N)}$  が成り立つので,  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  が存在して

$$A\rho(g) = \sigma(g)A \quad (\forall g \in G), \quad AM = NA$$

が成り立つものと仮定できる。 この場合,  $S^{n-1}$  から自分自身への2つの  $C^\infty$  級の写像  $k_A, k_A$  を

$$k_A(x) = \pi^N(Ax), \quad k_A(y) = \pi^M(A^{-1}y)$$

によって定義する。行列  $A$  に対する仮定によって、 $h_A$  と  $h_A$  とは互いに他の逆写像であることが分かり、さらに

$$h_A(\xi_{(p,M)}(g,x)) = \xi_{(q,N)}(g, h_A(x)) \quad (g \in G, x \in S^{n-1})$$

が成り立つことが示される。従って、 $h_A$  は  $(S^{n-1}, \xi_{(p,M)})$  から  $(S^{n-1}, \xi_{(q,N)})$  への *equivariant analytic diffeomorphism* である。

### §3 典型的な例について

$G = SL(n, \mathbb{R})$  とする。  $\rho_n: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  を自然な表現とし、 $\rho = \rho_n \otimes I_r = \overbrace{\rho_n \oplus \cdots \oplus \rho_n}^r$  とおく。  $\rho$  に付随した *twisted linear actions* について考察しよう。  $M \in M_r(\mathbb{R})$  が条件 (T) を満足すれば、対  $(\rho, I_n \otimes M)$  は TC-対になる。

この TC-対が定義する *twisted linear action* を  $\xi_M$  で表わそう。 条件 (T) を満足する行列  $M, N \in M_r(\mathbb{R})$  について、 $n \geq r+1$  の場合、2つの  $G$  多様体  $(S^{n-r-1}, \xi_M)$  と  $(S^{n-r-1}, \xi_N)$  の間に *equivariant homeomorphism* が存在すれば、 $A \in GL(r, \mathbb{R})$  と  $c > 0$  が存在して、 $AM = cNA$  が成り立つことを示そう。

$n \geq r+1$  の場合、 $\mathbb{R}^n$  の一次独立なベクトル  $u_1, \dots, u_r$  に対して、行列  $P \in SL(n, \mathbb{R})$  で  $Pe_i = \sqrt{r} u_i$  ( $i=1, \dots, r$ ) を満足するものが常に存在するので、 $G$  多様体  $(S^{n-r-1}, \xi_M)$  において  $\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1 \oplus \cdots \oplus e_r)$  を通る  $G$  軌道は  $S^{n-r-1}$  の中で稠密な開集合であることが分かる。  $\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1 \oplus \cdots \oplus e_r)$  における  $\xi_M$  に関する

isotropy 群を  $I^n(M)$  で表わそう。  $\xi_M$  の定義に戻って計算すると

$$\left( \begin{array}{c|c} {}^t \exp(\theta M) & \overbrace{*}^{n-r} \\ \hline 0 & * \end{array} \right) \quad \exists \theta \in \mathbb{R}$$

の形をした  $SL(n, \mathbb{R})$  の元の全体が  $I^n(M)$  になることが分かる。さて,  $G$  多様体  $(S^{n-r-1}, \xi_M)$  から  $(S^{n-r-1}, \xi_N)$  への *equivariant homeomorphism* が存在すれば, 稠密な開集合の像はやはり稠密な開集合であるから,  $\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1 \oplus \cdots \oplus e_r)$  の像は  $\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1 \oplus \cdots \oplus e_r)$  を通る  $G$  軌道に属することになり, 行列  $P \in SL(n, \mathbb{R})$  で

$$P \cdot I^n(M) \cdot P^{-1} = I^n(N)$$

となるものが存在することが分かる。一方,  $\mathbb{R}^n$  上の  $I^n(M)$  の自然な作用に関して不変な  $r$  次元部分空間は  $e_1, \dots, e_r$  によって生成される部分空間のみであることが, 群  $I^n(M)$  に属する行列の形から分かるので, 行列  $P$  は

$$P = \left( \begin{array}{c|c} P_i & \overbrace{*}^{n-r} \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$$

の形になることが分かる。従って,  $\forall \theta \in \mathbb{R}$  に対して

$$P_i \cdot {}^t \exp(\theta M) \cdot P_i^{-1} = {}^t \exp(\theta' N)$$

を満足する  $\theta' \in \mathbb{R}$  が定まり,  $M, N$  が条件 (T) を満足するので  $c > 0$  が存在して  $\theta' = c \cdot \theta$  となることが分かる。故に

$${}^t P_i^{-1} \cdot M \cdot {}^t P_i = c \cdot N$$

となる。

とくに,  $r=2$ ,  $n \geq 3$  の場合には, §1 末に挙げた行列に対応する *twisted linear actions* について, 異なる行列に対応する2つの *twisted linear actions* の間には *equivariant homeomorphism* が存在しないことが分かる。

$n \leq r$  の場合については研究中である。

注.  $G$  がコンパクトリイ群である場合には,  $G$  の任意の行列表現  $\rho$  に対して,  $\rho$  に付随した *twisted linear action* はすべて  $\rho$  に付随した *linear action* と *equivariant analytic* に *diffeomorphic* であることが証明できる。

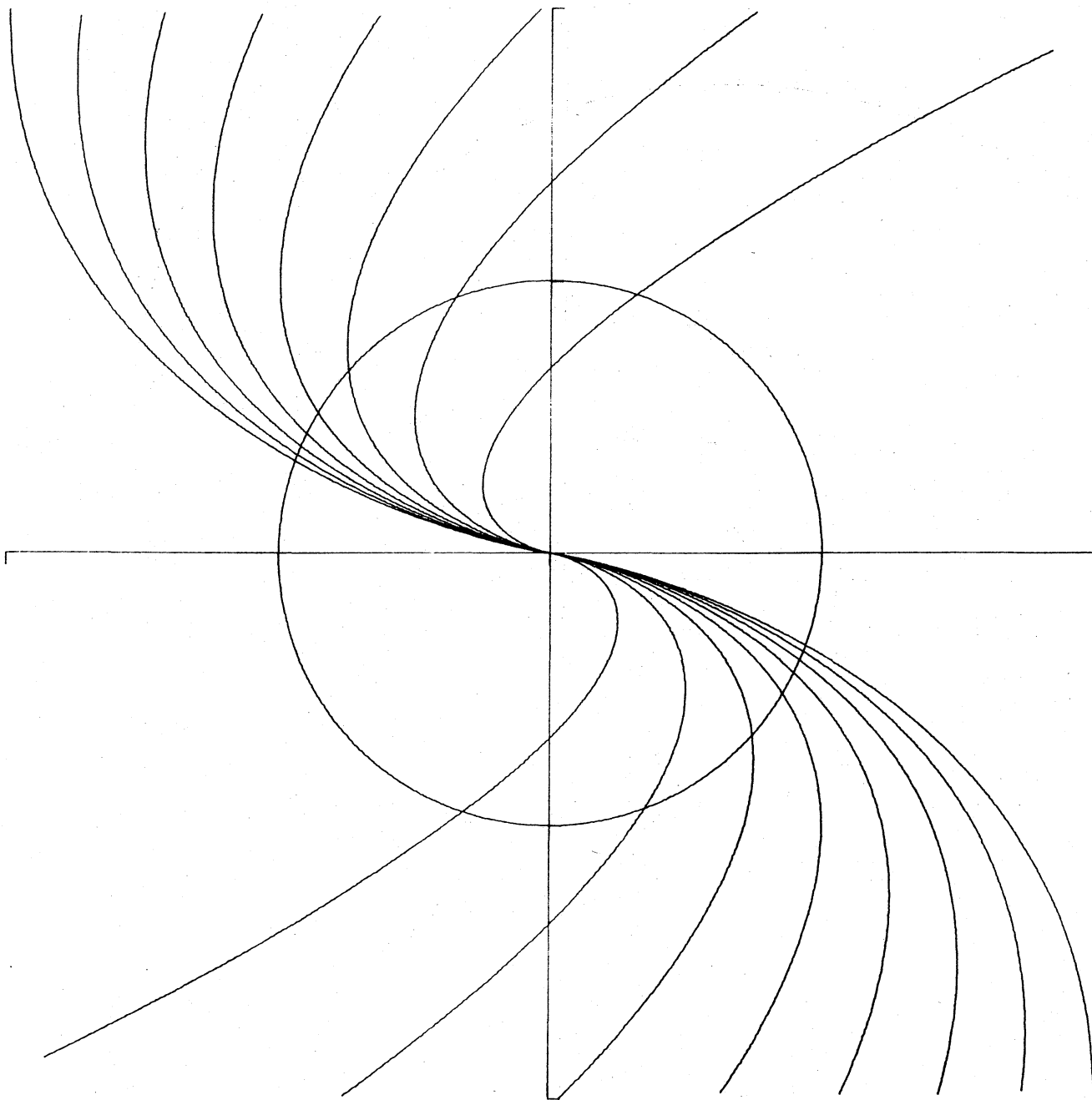
参考までに,  $n=2$  の場合について, 条件 (T) を満足する行列が定める一径数群の軌道の様子を2つの行列  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  の場合を図示しておこう。



$$X = K * \exp(T) * (T - 1)$$

$$Y = K * \exp(T)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



142

L= 3.00

X= K\*EXP(T)\*COS(L\*T)

Y= K\*EXP(T)\*SIN(L\*T)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

